Calcul différentiel et intégral

Génie civil, L3 / Ing 1

1er septembre 2021

Alexandre MIZRAHI

CY Tech

Table des matières

Présentation de l'organisation de l'unité d'enseignement

Cette unité d'enseignement est organisée sous forme de classe inversée, de la façon suivante :

Pour chacune des semaines d'enseignement (12 semaines)

1. Elle commence par un travail personnel (environ 1 heure)
   — Visionner 2 ou 3 vidéos sur la vidéothèque
   — Lire le chapitre du poly correspondant
   — Répondre à un QCM sur la plateforme pédagogique (Avant la veille du CM 23h00)
2. Elle se poursuit par un travail en CM
   — 20 minutes : Questions sur le cours, et compléments (les retards ne sont pas acceptés).
   — 40 minutes : Travail en petit groupe sur un thème du cours, avec une production à rendre en fin de séance.
   — 15 minutes : Correction du travail de groupe.
3. Elle se continue par un travail classique de résolution d'exercices en TD (2h30)
   — On cherche les exercices durant la séance.
   — On comprend la correction durant la séance, quitte à poser des questions à l'enseignant.
4. Elle se termine, si besoin, par un travail personnel de mise au point de l'ensemble.

L'évaluation de cette UE est constituée de trois éléments :
— Résultats aux QCM.
— Productions de groupe en CM.
— Contrôle de fin de semestre. Durant le contrôle les documents et calculatrices sont interdits, toutefois une feuille manuscrite A5 ou A4 recto est tolérée.

Cours de la semaine 1

Chapitre 1

Calcul différentiel

1.1 Notation

Définition 1.1 *1) On appelle fonction scalaire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans ce cours elles seront représentées par les lettres latines minuscules : f, g, h ou parfois F_i, G_i.*
2) On appelle fonction vectorielle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dans ce cours elles seront représentées par les lettres latines majuscules : F, G, H.
3) On appelle champ scalaire toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, ils seront notés en lettres grecques minuscules : φ (phi),

ψ (psi), ξ (xi), ou parfois Φ_i, Ψ_i.
4) On appelle champ vectoriel toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on les notera avec des lettres grecques majuscules Φ (phi), Ψ (psi), $\Gamma(gamma)$.

Remarque 1.1 $a, b, c, d, \alpha, \beta, x, y, z, x_1, x_2, x_i$ représenterons des réels (scalaires), n, p, q, k des entiers et X, Y, M des éléments de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Rappels sur les fonctions scalaires

Définition 1.2 *Une fonction scalaire f est dérivable en un point a si le taux de variation :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie lorsque x tend vers a. on note alors $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ cette limite.

Remarque 1.2 Cela s'interprète géométriquement à l'aide de la tangente en a à la courbe représentative de f. En effet $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur d'une corde, la corde limite lorsque les deux points viennent à se toucher est la tangente qui a alors $f'(a)$ comme coefficient directeur. L'équation de de la tangente en $(a, f(a))$ a donc pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
La dérivée de f en a, $f'(a)$ correspond donc à une sorte de coefficient de variation de f au voisinage de a, en ce sens que si la variable x varie de δx autours de a alors $f(x)$ varie d'environ $f'(a)\delta x$ autours de $f(a)$.

Dans la suite on suppose que les fonctions sont autant de fois dérivables que nécessaire, et au moins dérivables.

Définition 1.3 *Une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage d'un point a si le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On note alors $f = o(g)$.*

Proposition 1.1 *f est dérivable en a si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = l(x - a) + o(x - a)$.*

Exemple 1.1 En 0 on a $x\sqrt{x} = o(x)$, par contre en $+\infty$ on a $x = o(x\sqrt{x})$.

Remarque 1.3 Cette définition n'est plus opérationnelle si la fonction g s'annule dans un voisinage de a dans ce cas il est préférable de prendre comme définition, il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a, qui tend vers 0 en a, et telle que $\forall x,\ f(x) = g(x)\epsilon(x)$, la encore cela revient à définir rigoureusement qu'au voisinage de a, f est beaucoup plus petite que g.

Remarque 1.4 Au voisinage de 0 on a $x^n = o(x^m)$ si et seulement si $n > m$.
$x^2 = o(x)$ et $x = o(1)$

Proposition 1.2 *formule de Taylor : Si f est n fois dérivable en a alors au voisinage de a on a :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Définition 1.4 *On dit que : $f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n$ est la partie principale du DL.*

1.3 Dérivés des fonctions vectorielles

Définition 1.5 *Soit F une fonction vectorielle, $F(t) = (F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t))$. On appelle fonction vectorielle dérivée de F la fonction vectorielle définie par $F'(t) = (F_1'(t), F_2'(t), ..., F_n'(t))$. On peut aussi la noter $\frac{dF}{dt}(t)$.*

Exemple 1.2 Si $F(t) = (t^2, \ln(2 + t^2))$ alors $F'(t) = (2t, \frac{2t}{2+t^2})$.

Interprétation graphique : Dans le cas ou $n = 2$ l'image d'une fonction vectorielle F
Im$F = \{F(t) \in \mathbb{R}^2, t \in D_F\}$ est une courbe du plan, on dit alors que F est une paramétrisation de cette courbe. De même dans le cas $n = 3$ l'image d'une fonction vectorielle F est une courbe de l'espace, on dit alors que F est une paramétrisation de cette courbe.
Une autre interprétation graphique possible dans le cas $n = 2$ c'est de regarder le graphe de la fonction c'est à dire l'ensemble des points de l'espace de la forme $(x, F(x)$ on obtient alors une courbe de l'espace , im(F) est alors la projection du graphe sur le plan d'équation $x = 0$.

Exemple 1.3 Si $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ alors **Im**(F) est le cercle de centre 0 et de rayon 1.
Si $\forall t \in [0; 1],\ F(t) = \big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\big)$ alors **Im**(F) est le segment $[A; B]$.

Une interprétation possible est d'imaginer que $F(t)$ représente la position d'un point matériel à l'instant t alors $F'(t)$ représente son vecteur vitesse à l'instant t et $F''(t)$ représente son vecteur accélération au temps t.

Proposition 1.3 *On a clairement :*

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2)$$

Preuve : La notation $o((t - t_0)^2)$ représente une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\|F(t)\|}{(t - t_0)^2} = 0$. Il suffit d'écrire les composantes des fonctions vectorielles et l'on se ramène à du calcul de dérivée sur des fonctions scalaires, et de remarquer que si les composantes d'une fonction vectorielle tendent vers 0, il en est de même de la norme.

Proposition 1.4 *On a les règles de calculs suivantes :*
a) $(aF + bG)' = aF' + bG'$.
b) $< F, G >' = < F', G > + < F, G' >$ *où* $< ; >$ *est le produit scalaire de* $\mathbb{R}^n$.
c) $(fF)' = f'F + fF'$.
d) Dans le cas ou $n = 3$ *on a* $(F \wedge G)' = F' \wedge G + F \wedge G'$, *où* $\wedge$ *est le produit vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Preuve : Il suffit d'écrire les composantes des fonctions vectorielles et l'on se ramène à du calcul de dérivée sur des fonctions scalaires.

1.4 Champs scalaires

vidéo 3: Champs scalaire

La notion de dérivée est plus complexe ici car il y a plusieurs variables. On va commencer par définir la notion de dérivées partielles.

Exemple 1.4 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.

Interprétation graphique : Dans le cas $n = 2$ on peut regarder le graphe de ψ c'est à dire l'ensemble des points de la forme $(x, y, \psi(x, y))$ on obtient ainsi une surface de l'espace. Mais on peut aussi regarder le noyau de ψ on obtient alors un courbe du plan si $n = 2$ et une surface de l'espace si $n = 3$.

Définition 1.6 *On appelle dérivée partielle de* φ *par rapport à la i ème variable au point* $(a_1, ...a_n)$ *la dérivée en* $t = a_i$ *de la fonction scalaire*

$$f_i(t) = \varphi(a_1, ...a_{i-1}, t, a_{i+1}, ...a_n)$$

on note alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n) = f_i'(a_i)$ *cette dérivée partielle.*

Exemple 1.5 Si $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \ln(x_2^2 + 1) + x_2 x_3$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3) = x_2$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3) = \frac{2x_2}{x_2^2+1} + x_3$

Calculer la ième dérivée partielle revient à considérer toutes les autres variables comme des constantes et à dériver juste par rapport à la variable x_i.

Remarque 1.5 On se permet les abus d'écriture suivants si l'on définit $\varphi(x, y) = x^2 y$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ correspond à la dérivée partielle par rapport à la première variable.

Remarque 1.6 De même que pour la remarque 1.2 la dérivée partielle de φ par rapport à x au point (x_0, y_0), $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspond donc à une sorte de coefficient de variation de φ au voisinage de (x_0, y_0) dans la direction de x, en ce sens que si la variable x varie de δx autours de x_0, et y restant constante égale à y_0 alors $\varphi(x, y)$ varie d'environ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\delta x$ autours de $\varphi(x_0, y_0)$.

Proposition 1.5 *Sous des conditions peu restrictives (fonction différentiable) on a le développement limité d'ordre 1 (DL_1) :*

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big)$$

Remarque 1.7 On peut donc prolonger la remarque 1.6 la variation de la fonction $\varphi(x_0, y_0)$ lorsque x varie de δx et y varie de δy est égale à la somme de la variation en x : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\delta x$ et de la variation en y : $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\delta y$.

Remarque 1.8 Ici il faut comprendre le $o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big)$ comme un champs scalaire qui tend vers 0 plus vite que la norme du vecteur $(x - x_0, y - y_0)$ ce qui revient encore à :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

Définition 1.7 *On appelle différentielle et on note $d\varphi$, l'expression :*

$$d\varphi(M) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)\, dx_i$$

Ce qui permet d'écrire de façon condensée un DL_1 de φ :

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + d\varphi(M_0)\overrightarrow{M_0M} + o\big(\|\overrightarrow{M_0M}\|\big)$$

Que l'on peut comprendre ainsi pour tout $(h_1; h_2, \ldots, h_n)$; $d\varphi(M)(h_1; h_2, \ldots, h_n) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)h_i$. La proposition 1.5, est très proche des DL1 pour les fonctions scalaires :

Champs scalaires	$\varphi(x, y)$	$=$	$\varphi(x_0, y_0)$	$+$	$d\varphi(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$	$+$	$o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big)$
Fonctions scalaires	$f(x)$	$=$	$f(x_0)$	$+$	$f'(x_0)(x - x_0)$	$+$	$o(x - x_0)$

Proposition 1.6 *On a les règles de calculs suivantes :*
a) $\frac{\partial}{\partial x}(a\varphi + b\psi) = a\frac{\partial}{\partial x}\varphi + b\frac{\partial}{\partial x}\psi$
b) $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Preuve : a) et b) ne cause aucun problèmes on se ramène au cas des fonctions scalaires.

vidéo 4: Dérivation d'une compo

Théorème 1.1 *a)* $\frac{d}{dt}\varphi\big(f(t), g(t)\big) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\big(f(t), g(t)\big)f'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\big(f(t), g(t)\big)g'(t)$
b)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(\psi(x, y), \xi(x, y)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\psi(x, y), \xi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\psi(x, y), \xi(x, y))\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y)$$

Remarque 1.9 $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ est un nouveau champs scalaire dont on peut calculer les dérivées partielles.

Théorème 1.2 *(dit de Schwartz)*
Sous certaines conditions peu restrictives (fonctions deux fois différentiables) on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$$

Théorème 1.3 *(Développement limité d'ordre 2)*
Soit un point $M_0 = (x_0, y_0)$ on a pour une fonction assez régulière :

$$\varphi(x_0+h, y_0+k) = \varphi(M_0)+\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0)h+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)k+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(M_0)h^2+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(M_0)hk+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(M_0)k^2\Big)+o(\|(h, k)\|^2)$$

fin de la semaine 1

Cours de la semaine 2

1.5 Champs vectoriels

vidéo 5: Champs vectoriel

On se limite au cas $n = m = 2$ mais le cas général n'est pas plus compliqué, en fait il suffit de se ramener à l'étude précédente en regardant Φ coordonnée par coordonnée.

$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ On a alors $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{pmatrix}$

Définition 1.8 *Différentielle d'un champ vectoriel.*

$$d\Phi = \begin{pmatrix} d\Phi_1 \\ d\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}dy \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$$

Proposition 1.7 *Si $\Psi = \varphi\,\Phi$ on a $d\Psi = d\varphi\,\Phi + \varphi\,d\Phi$.*

Exemple 1.6 Soit $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x\ln(y) \end{pmatrix}$ on écrit des développements limités d'ordre 1 pour chacune des coordonnées de Φ au point $(3;1)$: $x^2y = 9+6(x-3)+9(y-1)+o(\|(x-3,y-1)\|)$ et $x\ln(y) = 3(y-1)+o(\|(x-3,y-1)\|)$ donc

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 9+6(x-3)+9(y-1)+o(\|(x-3,y-1)\|) \\ 3(y-1)+o(\|(x-3,y-1)\|) \end{pmatrix}$$

donc

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}(x-3) + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}(y-1) + o(\|(x-3,y-1)\|)$$

ce qui s'écrit encore matriciellement

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|(x-3,y-1)\|)$$

La matrice 2×2 qui apparaît naturellement s'appelle matrice Jacobienne de Φ au point $(3,1)$. Ici le o est un champ vectoriel dont la norme est petite devant la norme du vecteur $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)$.

Définition 1.9 *On appelle matrice Jacobienne de Φ en (x_0,y_0) la matrice :*

$$J\Phi(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Proposition 1.8 *On a la relation $\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0) + J\Phi(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x-x_0,y-y_0)\|)$ qui s'écrit aussi $\Phi(M) = \Phi(M_0) + J\Phi(M_0)\overrightarrow{M_0M} + o(\|\overrightarrow{M_0M}\|)$*

Remarque 1.10 Pour écrire la différentielle à l'aide de la matrice jacobienne il suffit de remarquer que $\mathrm{d}\Phi = J\Phi(x,y)\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$ est souvent noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ ou $\mathrm{d}M$.

Remarque 1.11 Au voisinage du points (x_0,y_0), Φ agit comme l'endomorphisme (application linéaire) de matrice $J\Phi(x_0,y_0)$ dans la base canonique, or cette application linéaire multiplie les aires par la valeur absolue de son déterminant. Ici localement, au voisinage du point (x_0,y_0), Φ multiplie les aires par $|\det(J\Phi(x_0,y_0))|$.

1.6 Interprétations géométriques, tangentes et plans tangents

1.6.1 Courbes du plan

vidéo 6: Tangente à une courbe du plan.

Il y a plusieurs façons de définir une courbe du plan, nous allons en étudier 3.

Graphe d'une fonction scalaire

C'est ce que l'on connaît le mieux, $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 /\ x \in \mathbb{R}\}$ est une courbe du plan.

Exemple 1.7 a) $f(x) = x^2$ alors G est une parabole.
b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans ce cas G est un demi cercle. La tangente à G en un point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. c'est donc le graphe de la fonction $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ c'est à dire la partie principale du DL1 de f en x_0.

Courbes paramètrées

Soit F une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, $G = \mathbf{Im}F = \{F(t) \in \mathbb{R}^2 / t \in \mathbb{R}\}$ est alors une courbe du plan.

Exemple 1.8 $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ dans ce cas G est un cercle.
$F(t) = (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ dans ce cas G est une branche d'hyperbole, car on a la relation $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$.

On veut décrire la tangente à G en un point $F(t_0)$. Pour cela faisons un développement limité de F en t_0

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

Les points de la courbe G qui s'écrivent $F(t)$ avec t proche de t_0 sont très proche des points

$$L(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0)$$

car pour t très proche de t_0 le $o(t - t_0)$ est très petit devant $F'(t_0)(t - t_0)$ (si toutefois $F'(t_0) \neq 0$). Or l'ensemble des points $L(t)$ est une droite, c'est la tangente à G en $F(t_0)$ et donc la tangente en $F(t_0)$ à $\mathbf{Im}(F)$ est $\mathbf{Im}(L)$. Il faut remarquer que ceci n'est vrai que si $F'(t_0) \neq 0$, sinon la tangente peut exister ou ne pas exister.

Exemple 1.9 $F(t) = (t\cos(t); \sin(t))$, on remarque que $F(0) = 0$ et $F(\frac{\pi}{2}) = (0; 1)$ dérivons F, $F'(t) = (\cos(t) - t\sin(t); \cos(t)$ donc $F'(0) = (1; 1)$ et $F'(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2}; 0)$. En O, $L(t) = 0 + (1, 1)t$ donc la tangente est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $(1; 1)$. En $(0; 1)$ $L(t) = (0; 1) + (-\frac{\pi}{2}; 0)(t - \frac{\pi}{2})$ c'est donc la droite horizontale passant par $(0; 1)$.

Équations

Soit φ est un champs scalaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $G = \mathbf{Ker}\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \varphi(x, y) = 0\}$ est alors une courbe du plan.

Exemple 1.10 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ alors $\mathbf{Ker}\varphi$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exemple 1.11 $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ alors $\mathbf{Ker}\varphi$ est une hyperbole.

On s'intéresse à la tangente à G au point $(x_0; y_0) \in G$ or

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big)$$

mais $\varphi(x_0, y_0) = 0$ car $(x_0, y_0) \in G$ donc au voisinage de (x_0, y_0) la partie la plus importante de $\varphi(x, y)$ est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Pour que (x, y) appartiennent à G il faut et il suffit que $\varphi(x, y) = 0$ ce qui en première approximation donne $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. Si on note :

$$L(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

la tangente à $\mathbf{Ker}F$ en (x_0, y_0) est $\mathbf{Ker}L$. On remarque comme précédemment que ceci ne définit une droite que si $d\varphi(x_0, y_0)$ est non nulle, sinon il faut faire un DL à un ordre supérieur.

Exemple 1.12 $\varphi(x,y) = x^2y - y^2 + 2$ on vérifie que le point (1 ;2) appartient bien à **Ker**φ puis calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2y$$

donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1;2) = 4$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1;2) = -3$ l'équation de la tangente à G en (1 ;2) est donc $4(x-1) - 3(y-2) = 0$ soit encore $4x - 3y = -2$.

fin de la semaine 2

Cours de la semaine 3

1.6.2 Surfaces de l'espace

Il y a plusieurs façons de définir une surface de l'espace, nous allons en étudier 3.

vidéo 7: Plan tangent à une surface de l'e

Graphe d'un champ scalaire

$G = \{(x,y,\psi(x,y)) \in \mathbb{R}^3 / \ x,y \in \mathbb{R}\}$ où ψ est un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. A chaque couple (x,y) on associe un z ce qui nous permet de définir une surface de l'espace.

Exemple 1.13 a) $\psi(x,y) = x^2 + 2y^2$ alors $G = \{(x,y,x^2+2y^2) \in \mathbb{R}^3 / \ x,y \in \mathbb{R}\}$

Lorsque (x,y) est très proche de (x_0,y_0) alors $\psi(x,y)$ est très très proche de

$$\psi(x_0,y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

car l'erreur commise est un $o\big(\|(x-x_0,y-y_0)\|\big)$, il est donc "très petit" devant le vecteur $(x-x_0,y-y_0)$. Le graphe de ce champ $L(x,y) = \psi(x_0,y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ est un plan, c'est le plan tangent à G au point $(x_0,y_0,\psi(x_0,y_0))$.

Exemple 1.14 Si l'on reprend l'exemple précédent en $(2,3)$ on a $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(2,3) = 4$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(2,3) = 12$, donc le plan tangent est le graphe du champ

$$L(x,y) = \psi(2,3) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(2,3)(y-3) = 22 + 4(x-2) + 12(y-3)$$

ce qui correspond au plan d'équation : $z = 22 + 4(x-2) + 12(y-3)$ soit $4x + 12y - z = 22$.

Surfaces paramétrées

Soit Φ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ alors $G =$ **Im**$\Phi = \{\Phi(u,v) \in \mathbb{R}^3 / \ u,v \in \mathbb{R}\}$ est une surface de l'espace.

Remarque 1.12 Pour tout $u,v \in \mathbb{R}$, $\Phi(u,v) \in \mathbb{R}^3$ donc G est bien une partie de $\mathbb{R}^3$. Il y a deux paramètres lorsque u varie et v fixe on obtient une courbe. Pour chaque v on a une courbe, qui toutes regroupées forment une surface.

Exemple 1.15 Soit $\Phi(\theta,\omega) = (\cos(\theta)\cos(\omega), \cos(\theta)\sin(\omega), \sin(\theta))$, l'image G de Φ est la sphère de centre O et de rayon 1. On remarque en effet que si $(x,y,z) \in$ **Im**Φ alors $x^2+y^2+z^2 = 1$, la réciproque se montre aussi...

On veut déterminer le plan tangent à G en un point $\Phi(\theta_0,\omega_0)$. Pour cela faisons un développement limité de Φ en (θ_0,ω_0)

$$\Phi(\theta,\omega) = \Phi(\theta_0,\omega_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0,\omega_0)(\theta-\theta_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\theta_0,\omega_0)(\omega-\omega_0) + o\big(\|(\theta-\theta_0,\omega-\omega_0)\|\big)$$

Les points de la surface G qui s'écrivent $\Phi(\theta,\omega)$ avec (θ,ω) proche de (θ_0,ω_0) sont très proche des points $L(\theta,\omega)$ avec

$$L(\theta,\omega) = \Phi(\theta_0,\omega_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0,\omega_0)(\theta-\theta_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\theta_0,\omega_0)(\omega-\omega_0)$$

car pour (θ, ω) très proche de (θ_0, ω_0) le $o(\theta-\theta_0, \omega-\omega_0)$ est très petit devant $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \omega_0)(\theta-\theta_0)+\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\theta_0, \omega_0)(\omega-\omega_0)$ or l'ensemble des points $L(t)$ est un plan, c'est le plan tangent à G en $\Phi(\theta_0, \omega_0)$ et donc le plan tangent en $\Phi(\theta_0, \omega_0)$ à $\mathbf{Im}(\Phi)$ est $\mathbf{Im}(L)$. Il faut remarquer que ceci n'est vrai que si $\mathbf{Im}L$ est un plan, c'est le cas lorsque les deux vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \omega_0)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\theta_0, \omega_0)$, sont linéairement indépendants. Lorsque les deux vecteurs sont colinéaires le plan tangent peut ne pas exister.

Exemple 1.16 $\Phi(\theta, \omega) = (\omega, \theta^3, e^{\omega\theta})$, $P = (1, 0, 1) = \Phi(0, 1) \in \mathbf{Im}\Phi$

$$\begin{aligned} L(\theta, \omega) &= \Phi(0,1) + \tfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}(0,1)(\theta) + \tfrac{\partial \Phi}{\partial \omega}(0,1)(\omega-1) \\ &= (1,0,1) + (0,0,-1)\theta + (1,0,0)(\omega-1) \end{aligned}$$

Le plan tangent à la surface en P est donc le plan de base $\big((0,0,-1);(1,0,0)\big)$ et passant par le point $(1,0,1)$ c'est donc le plan d'équation $y = 0$.

Équations

Soit φ un champ scalaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, $G = \mathbf{Ker}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ \varphi(x,y,z) = 0\}$ est alors une surface de l'espace. En effet si l'on pouvait résoudre l'équation, pour chaque x, y on trouverait un ou plusieurs z, donc une surface.

Exemple 1.17 $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ alors $\mathbf{Ker}\varphi$ est le cylindre à base circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exemple 1.18 $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ alors $\mathbf{Ker}\varphi$ est la sphère de centre O et de rayon 1.

On s'intéresse à la tangente à G au point $(x_0; y_0; z_0) \in G$ donc $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ si l'on fait un DL1 de φ

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) + o\big(\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|\big)$$

donc au voisinage de (x_0, y_0, z_0) la partie la plus importante de $\varphi(x,y,z)$ est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

Pour que (x,y,z) appartiennent à G il faut et il suffit que $\varphi(x,y,z) = 0$ ce qui en première approximation donne (si les dérivées partielles ne sont pas toutes nulles)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Si on note

$$L(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

le plan tangent à $\mathbf{Ker}\varphi$ en (x_0, y_0, z_0) est $\mathbf{Ker}L$. On remarque comme précédemment que ceci ne peut se faire que si L est non nulle.

Exemple 1.19 $\varphi(x,y) = (x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 - 16(1 - z^2)$

1.6.3 Courbes de l'espace

vidéo 8: Tangente à une courbe de l'e

Il y a plusieurs façons de définir une courbe de l'espace, nous allons en étudier 3.

Graphe d'une fonction vectorielle

$\mathcal{C} = \{(x, F_1(x), F_2(x)) \in \mathbb{R}^3 / \ x \in \mathbb{R}\}$ ou F_1 et F_2 sont des fonctions scalaires, coordonnées d'une fonction vectorielle F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. A chaque x on associe un y et un z ce qui nous permet de définir une courbe de l'espace.

Exemple 1.20 a) $F(x) = (\cos(x), \sin(x))$ alors $\mathcal{C} = \{(x, \cos(x), \sin(x)) \in \mathbb{R}^3 / \ x \in \mathbb{R}\}$

Si l'on regarde pour chacune des coordonnées on va trouver pour la tangente à $(x - \frac{\pi}{4})$ en un point $(x_0, F(x_0))$ le graphe de la partie principale du DL 1 de F en x_0. $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$.

Exemple 1.21 Si l'on reprend l'exemple précédent en $\frac{\pi}{4}$ on a $F'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, donc la tangente est le graphe de la fonction

$$G(x) = F(\frac{\pi}{4}) + F'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})$$

soit encore

$$G(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})(x - \frac{\pi}{4})$$

ce qui correspond à la droite d'équation : $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

Courbes paramétrées

Soit F une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \mathbf{Im}F = \{F(t) \in \mathbb{R}^3 / \ t \in \mathbb{R}\}$ est une courbe de l'espace.

Exemple 1.22 Soit $F(t) = (\cos(t/3), \sin(t), \cos(t))$. $\mathbf{Im}F$ est une courbe de l'espace on peut remarquer que pour tout point (x, y, z) de $\mathbf{Im}F$ on a la relation $y^2 + z^2 = 1$ donc la courbe se trouve sur le cylindre d'équation $y^2 + z^2 = 1$.

On veut décrire la tangente à $\mathcal{C}$ en un point $F(t_0)$. Pour cela faisons un développement limité de F en t_0

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

Les points de la courbe $\mathcal{C}$ qui s'écrivent $F(t)$ avec t proche de t_0 sont très proche des points $L(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0)$ car pour t très proche de t_0 le $o(t - t_0)$ est très petit devant $F'(t_0)(t - t_0)$ or l'ensemble des points $L(t)$ est une droite, c'est la tangente à G en $F(t_0)$ et donc la tangente en $F(t_0)$ à $\mathbf{Im}(F)$ est $\mathbf{Im}(L)$. Il faut remarquer que im L est une droite ssi $F'(t_0) \neq 0$, sinon la tangente peut exister ou ne pas exister.

Exemple 1.23 Reprenons l'exemple précédent en $F(0)$ la tangente est donc l'image de la fonction

$$L(t) = F(0) + F'(0)t = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)t$$

La tangente est donc parallèle à l'axe (Oy).

Équations

Soit Φ est un champs vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \mathbf{Ker}\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \Phi(x, y, z) = 0\}$ est alors une courbe de l'espace.

Exemple 1.24 $\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, z)$ alors $\mathbf{Ker}\Phi$ est un cercle.

Exemple 1.25 $\Phi(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 - 3z^2, z^2 - 1)$ alors $\mathbf{Ker}\Phi$ est la réunion de deux ellipses.

On s'intéresse à la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathcal{C}$ or

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(M_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)(z - z_0) + o\big(\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|\big)$$

mais $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$ car $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ donc au voisinage de (x_0, y_0, z_0) la partie principale de $\Phi(x, y, z)$ est :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Pour que (x,y,z) appartiennent à $\mathcal{C}$ il faut et il suffit que $\Phi(x,y,z)=0$ ce qui en première approximation donne $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$. Si on note $L(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$ la tangente à **Ker**Φ en (x_0,y_0,z_0) est **Ker**L. On remarque comme précédemment que ceci ne peut se faire que si L est non nulle.

Exemple 1.26 $\Phi(x,y,z)=(x^2y-y^2+2xz^2,xyz)$ on vérifie que le point $G=(1;2;1)$ appartient bien à **Ker**Φ puis calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z)=(2xy+2z^2,yz);\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z)=(x^2-2y,xz);\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z)=(4xz,xy)$$

donc $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(1,2,1)=(6,2)$; $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(1,2,1)=(-3,1)$; $\frac{\partial\Phi}{\partial z}(1,2,1)=(4,2)$ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en (1 ;2 ;1) est donc définie par les équations

$$\begin{cases} 6(x-1)-3(y-2)+4(z-1)=0 \\ 2(x-1)+(y-2)+2(z-1)=0 \end{cases}$$

fin de la semaine 3

Cours de la semaine 4

Chapitre 2

Différents systèmes de coordonnées

2.1 Coordonnées Polaires

vidéo 9: Coordonnée

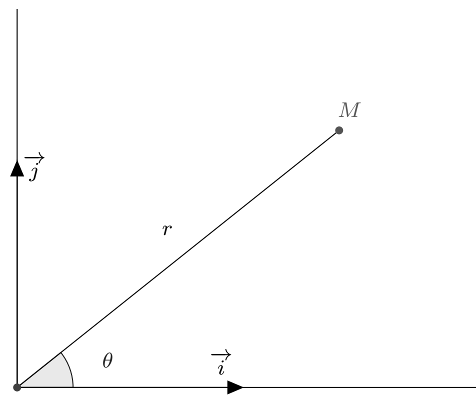
Définition 2.1 *Dans le plan, pour un point M de coordonnées (x,y) on pose* $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ *;*
θ est une mesure de l'angle $\sphericalangle(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$, et $r=\sqrt{x^2+y^2}$ la longueur du segment $[OM]$.

On peut alors définir en ce point M une base orthonormale adaptée au coordonnées polaires : Base locale :

$$\overrightarrow{u}_r=\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \text{ et } \overrightarrow{u}_\theta=Rot_{(0,\frac{\pi}{2})}(\overrightarrow{u_r})$$

$\overrightarrow{u}_r$ est orienté comme $\overrightarrow{OM}$ mais de longueur 1, et $\overrightarrow{u}_\theta$ fait un angle orienté de $\frac{\pi}{2}$ avec $\overrightarrow{u}_r$.

On peut remarquer que $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta})$ est une base orthonormée directe du plan, que $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}$, et que $\begin{cases} \overrightarrow{u}_r:(\cos\theta,\sin\theta) \\ \overrightarrow{u}_\theta:(-\sin\theta,\cos\theta) \end{cases}$.



Proposition 2.1 — $\overrightarrow{u}_r=\dfrac{\partial M}{\partial r}$ *et* $\overrightarrow{u}_\theta=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial\theta}}{\|\frac{\partial M}{\partial\theta}\|}$

— $\dfrac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta}=\overrightarrow{u}_\theta$ *et* $\dfrac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\theta}=-\overrightarrow{u_r}$

— $d\overrightarrow{u_r}=d\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ *et* $d\overrightarrow{u_\theta}=-d\theta\,\overrightarrow{u_r}$

Proposition 2.2 $dM=dr\,\overrightarrow{u_r}+rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$

Proposition 2.3 *Si* $M(t) = r(t)\overrightarrow{u_r}(t)$ *alors* $M'(t) = r'(t)\overrightarrow{u_r}(t) + r(t)\overrightarrow{u_r}'(t)$

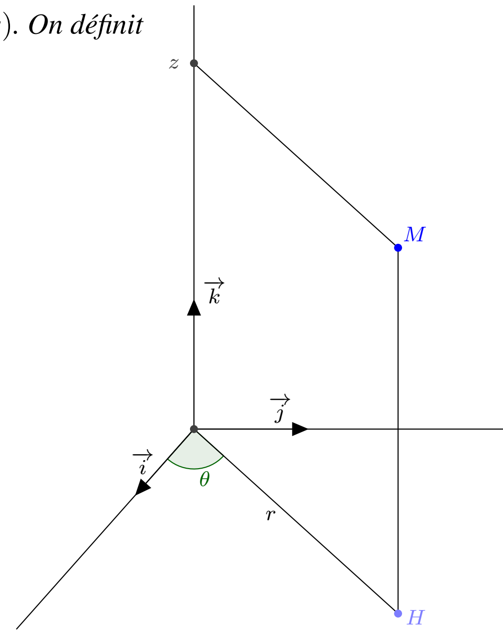
Exemple 2.1 Étudier la courbe paramétrée par $r(\theta) = \frac{1}{\pi}\theta$.

2.2 Coordonnées cylindriques

vidéo 10: Coordonnée

Définition 2.2 *Dans l'espace, pour un point* M *de coordonnées* (x, y, z) *soit* H *le projeté orthogonale de* M *sur* (xOy), r *et* θ *les coordonnées polaire du point* H *dans le repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *on a alors* $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

r est égale à la longueur OH et θ est une mesure de l'angle $\sphericalangle(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OH})$.



Définition 2.3 *Soit* M *un point de l'espace et* H *son projeté orthogonale sur* (xOy)*. On définit*

$$\overrightarrow{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|} \text{ et } \overrightarrow{u}_\theta = Rot_{(\overrightarrow{k}, \frac{\pi}{2})}(\overrightarrow{u_r})$$

On peut remarquer que $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{k}$ et que $\begin{cases} \overrightarrow{u}_r : (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \overrightarrow{u}_\theta : (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \end{cases}$.

Proposition 2.4 $\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta} = \overrightarrow{u_\theta}$ *et* $\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = -\overrightarrow{u_r}$

$$d\overrightarrow{u_r} = d\theta\overrightarrow{u_\theta} \text{ et } d\overrightarrow{u_\theta} = -d\theta\,\overrightarrow{u_r}$$

Proposition 2.5 $dM = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{k}$

Proposition 2.6 *Si* $M(t) = r(t)\overrightarrow{u_r}(t) + z(t)\overrightarrow{k}$ *alors*

$$M'(t) = r'(t)\overrightarrow{u_r}(t) + r(t)\overrightarrow{u_r}'(t) + z'(t)\overrightarrow{k}$$

2.3 Coordonnées sphériques

Définition 2.4 *Dans l'espace, pour un point* M *de coordonnées* (x, y, z) *on note* H *le projeté orthogonale de* M *sur* (xOy), r *est égale à la longueur* OM, φ *est une mesure de l'angle* $\sphericalangle(\overrightarrow{k}; \overrightarrow{OM})$ *et* θ *est une mesure de l'angle* $\sphericalangle(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OH})$.

Proposition 2.7 *On a donc :* $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

Définition 2.5 *Base locale :*

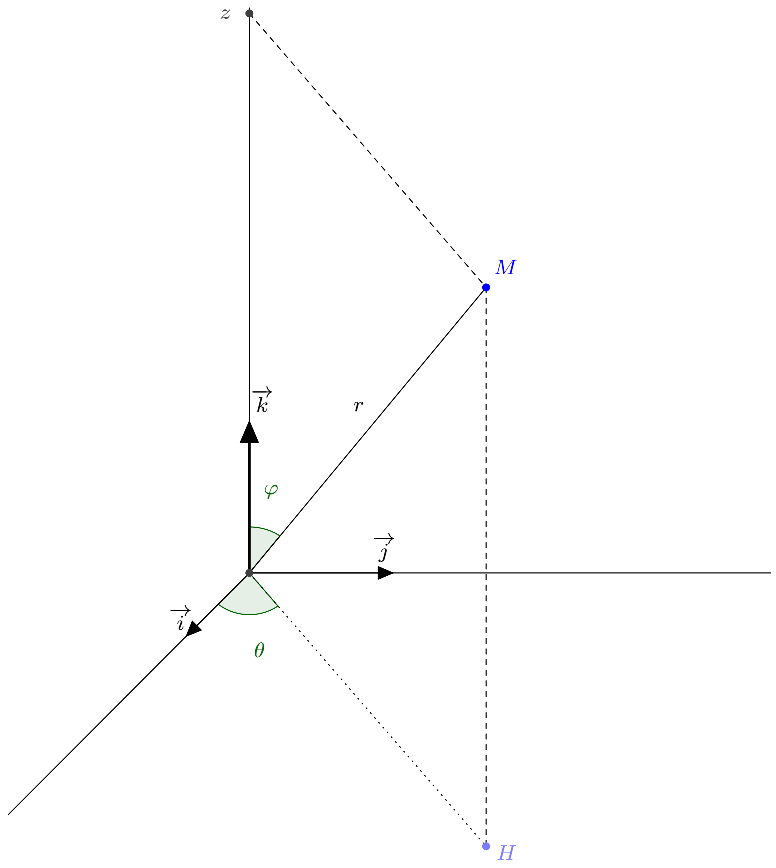
$$\overrightarrow{u}_r = \frac{\partial M}{\partial r},\ \overrightarrow{u}_\varphi = \frac{\frac{\partial M}{\partial\varphi}}{\left\|\frac{\partial M}{\partial\varphi}\right\|},\ \text{et } \overrightarrow{u}_\theta = \frac{\frac{\partial M}{\partial\theta}}{\left\|\frac{\partial M}{\partial\theta}\right\|}$$

Proposition 2.8
- $\overrightarrow{u_r} = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$
- $\overrightarrow{u_\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$
- $\overrightarrow{u_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

On peut remarquer que $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\varphi}; \overrightarrow{u_\theta})$ est une base orthonormée directe de l'espace et que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$.

Proposition 2.9 *On remarque que* $\dfrac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \varphi} = \overrightarrow{u_\varphi}$ *et* $\dfrac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \theta} = \sin(\varphi)\overrightarrow{u_\theta}$

$$dM = dr\overrightarrow{u_r} + rd\overrightarrow{u_r} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\varphi\overrightarrow{u_\varphi} + r\sin\varphi\, d\theta\, \overrightarrow{u_\theta}$$



fin de la semaine 4

Cours de la semaine 5

Chapitre 3

Opérateurs différentiels

3.1 Généralités

Définition 3.1 *1) On appelle opérateur une application linéaire d'un espace dans lui même.*
2) On appelle opérateur différentiel un opérateur qui fait intervenir des dérivations.
3) On note D la fonction qui à une fonction f associe sa dérivée f'.

Exemple 3.1 Si $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$ alors $D(f)(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ou encore $D(\sin) = \cos$ et $D(\cos) = -\sin$.

Proposition 3.1 *D est un opérateur différentiel*

En effet $D(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)'=(\alpha f'+\beta g')=\alpha D(f)+\beta D(g))$

Exemple 3.2 Soit $K(f)=D(xD(f))$ par exemple $K(x^7)=D(x7x^6)=D(7x^7)=49x^6$. K est un opérateur différentiel, il est d'ailleurs égale à $D+xD^2$, par exemple $(D+xD^2)x^7=7x^6+xD(7x^6)=7x^6+42xx^5=49x^6$.

3.2 Gradient

vidéo 11: Le gradient.

Définition 3.2 *On note dM ou $d\overrightarrow{OM}$ la différentielle du vecteur identité, si $\overrightarrow{OM}=\sum x_i\overrightarrow{e_i}$ alors $d\overrightarrow{OM}=\sum dx_i\overrightarrow{e_i}$.*

Théorème 3.1 *Soit ψ un champ scalaire, il existe un champ vectoriel, appelé gradient de ψ, noté $\overrightarrow{grad}\psi$ tel que*

$$d\psi=\overrightarrow{grad}\psi.\,d\overrightarrow{OM}$$

Le point représente ici un produit scalaire.

Preuve : Si on se place dans une bon $\mathrm{d}\psi=\sum_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$, or ceci est le produit scalaire du vecteur $(\frac{\partial\psi}{\partial x_1};\frac{\partial\psi}{\partial x_2};\cdots\frac{\partial\psi}{\partial x_n})$, par le vecteur $(\mathrm{d}x_1;\mathrm{d}x_2;\cdots\mathrm{d}x_n)$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi$ n'est autre que le vecteur $(\frac{\partial\psi}{\partial x_1};\frac{\partial\psi}{\partial x_2};\cdots\frac{\partial\psi}{\partial x_n})$.

Proposition 3.2 *Le gradient est un opérateur différentiel.*
Le gradient de φ en (x,y) est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$

Exemple 3.3 1) Si $\psi(x,y)=x^2+y^4x$ alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi(x,y)=\begin{pmatrix}2x+y^4\\ 4y^3x\end{pmatrix}$

2)Si $\psi(x,y,z)=e^{xy}+\ln(xz)$ alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi(x,y,z)=\begin{pmatrix}ye^{xy}+\frac{1}{x}\\ xe^{xy}\\ \frac{1}{z}\end{pmatrix}$

Remarque 3.1 On utilise souvent la notation $\nabla\psi$ (nabla) au lieu de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi$. Ce qui facilite certains calculs si l'on pense à ∇ comme au 'vecteur symbolique ' $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ on a alors

$$\nabla\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Proposition 3.3 *Gradient en coordonnées polaires :*

$$\overrightarrow{grad}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\overrightarrow{u_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Preuve : $\mathrm{d}\psi=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi.\mathrm{d}M$, $\mathrm{d}M$ peut se voir dans la base canonique $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ on obtient alors $\mathrm{d}M=\mathrm{d}x\overrightarrow{i}+\mathrm{d}y\overrightarrow{j}$. On obtient alors le gradient en coordonnées cartésiennes. En se plaçant en coordonnées polaire on a $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}$ d'où $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}+r\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}=\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}+r\overrightarrow{u_\theta}\mathrm{d}\theta$. Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi=\psi_r\overrightarrow{u_r}+\psi_\theta\overrightarrow{u_\theta}$ alors $\mathrm{d}\psi=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=(\psi_r\overrightarrow{u_r}+\psi_\theta\overrightarrow{u_\theta}).(\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}+r\overrightarrow{u_\theta}\mathrm{d}\theta)=\psi_r\mathrm{d}r+\psi_\theta r\mathrm{d}\theta$ or $\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$, d'ou $\psi_r=\frac{\partial\psi}{\partial r}$ et $\psi_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$.

Proposition 3.4 *Gradient en coordonnées sphériques :*

$$\overrightarrow{grad}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\overrightarrow{u_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Interprétation géométrique Soit S une surface d'équation ψ c'est à dire que $S = \mathbf{Ker}\psi$. En (x_0, y_0, z_0) le plan tangent à S est le plan d'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Qui s'écrit aussi

$$\nabla\psi(M_0) \,.\, \overrightarrow{M_0M} = 0$$

on remarque alors que le vecteur $\nabla\psi(x_0; y_0; z_0)$ est orthogonal au plan tangent.

Proposition 3.5 *Le vecteur $\nabla\psi(x_0; y_0; z_0)$ est orthogonal à la surface définie par l'équation $\psi(x, y, z) = 0$ au point $(x_0; y_0; z_0)$.*

Exemple 3.4 Dans le cas d'une sphère centrée en 0 pour $\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \gamma$ on retrouve bien le résultat attendu.

Une autre interprétation géométrique possible est de regarder le graphe d'un champ scalaire ψ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La troisième coordonnées $\psi(x, y)$ s'interprète alors comme l'altitude du point de coordonnées plane (x, y). Le gradient de ψ au point de coordonnées (x, y) correspond à la direction de plus grande pente. En effet

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$$

or

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \nabla\psi(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

En notant $\Delta\Psi = \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)$ la variation de Ψ et $M = (x; y)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ on obtient

$$\Delta\Psi = \nabla\psi(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M} + o(\|\overrightarrow{M_0M}\|) = \|\nabla\psi(M_0)\| \left\|\overrightarrow{M_0M}\right\| \cos(\widehat{\nabla\psi(M_0); \overrightarrow{M_0M}}) + o(\|\overrightarrow{M_0M}\|)$$

donc $\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)$ est maximal (à norme de $\overrightarrow{M_0M}$ fixe) lorsque le vecteur de coordonnée $(x - x_0, y - y_0)$ est colinéaire au vecteur $\nabla\psi(x_0, y_0)$.

3.3 Divergence

🎞 vidéo 12: La divergence.

Définition 3.3 *Soit Φ un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$). On appelle divergence de Φ le champ scalaire $div(\Phi)$ défini par :*

$$div(\Phi) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}$$

Remarque 3.2 La divergence n'est autre que la trace de la matrice Jacobienne de Φ, on en déduit facilement que la formule est la même dans toutes les bases fixes du plan.

On peut noter la divergence à l'aide du vecteur symbolique nabla (∇) et d'un produit scalaire $(\cdot)$:

$$div(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \nabla \cdot \Phi$$

Il faut toutefois faire bien attention car à ce moment là le produit scalaire de Φ par ∇ n'est pas égal au produit scalaire de ∇ par Φ : $\nabla \,.\, \Phi \neq \Phi \,.\, \nabla$

Exemple 3.5 Si $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ alors

$$div(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 3x \neq \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

ce dernier terme étant lui même un nouvel opérateur différentiel.

Proposition 3.6 *Soit ψ un champ scalaire et Φ un champ vectoriel, $\psi\Phi$ est un champ vectoriel sa divergence est :*

$$div(\psi\,\Phi) = \overrightarrow{grad}\psi \cdot \Phi + \psi\, div\Phi$$

Interprétation en terme de flux : Dans $\mathbb{R}^2$, soit un petit domaine D entouré par ∂D, et contenant le point M_0, on peut montrer que le flux de $\overrightarrow{\Phi}$ sortant de ∂D est équivalent à l'aire de Φ que multiplie une constante lorsque "le domaine D tend vers le point M_0". Cette constante est exactement la divergence de Φ en M_0. La divergence permet donc de mesurer la capacité d'un champ de vecteur à s'éloigner d'un point.
De même dans $\mathbb{R}^3$, si D représente un petit volume, ∂D la surface qui l'entoure, le flux de $\overrightarrow{\Phi}$ sortant de ∂D est équivalent au volume de D que multiplie la divergence de Φ.

Proposition 3.7 *Soit $\Phi = \Phi_r\overrightarrow{u_r} + \Phi_\theta\overrightarrow{u_\theta}$ un champ vectoriel exprimé en coordonnées polaires, sa divergence est donnée par :*

$$div(\,\Phi) = \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\Phi_r)}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta}\right)$$

3.4 Rotationnel

vidéo 13: Le rotationnel et le théorème de Poincarré.

Définition 3.4 *On appelle rotationnel du champ de vecteurs Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs :*

$$rot(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ -(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque 3.3 On peut noter le rotationnel à l'aide du vecteur symbolique nabla (∇) et d'un produit vectoriel

$$rot(\Phi) = \nabla \wedge \Phi$$

Attention comme dans le cas de la divergence on ne peut pas intervertir l'ordre dans le produit vectoriel.

Interprétation en terme de circulation : Dans $\mathbb{R}^3$, soit une petite surface S plane, entourée par une courbe ∂S, et contenant le point M_0, on peut montrer que la circulation de $\overrightarrow{\Phi}$ le long de ∂D est équivalent à l'aire de S que multiplie le produit scalaire du rotationnel de Φ avec $\overrightarrow{n}$, vecteur normal à S unitaire.

Le rotationnel permet donc de mesurer la capacité d'un champ de vecteur à tourner autour d'un axe. C'est autours de la direction du rotationnel qu'il tourne le plus.

Proposition 3.8 *Soit $\Phi = \Phi_r\overrightarrow{u_r} + \Phi_\theta\overrightarrow{u_\theta} + \Phi_z\overrightarrow{k}$ un champ vectoriel exprimé en coordonnées cylindrique, son rotationnel est donné par :*

$$rot(\,\Phi) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\Phi_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{k}$$

Laplacien

Définition 3.5 *On appelle Laplacien de ψ la divergence du gradient de ψ et on le note $\Delta\psi$*

Proposition 3.9 *On a* $\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

Proposition 3.10 Δ *est un opérateur différentiel.*

3.5 Théorème de Poincarré

Proposition 3.11 *Le rotationnel d'un gradient est nul.*

$$\nabla \wedge (\nabla\psi) = 0$$

La divergence d'un rotationnel est nulle

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \Phi) = 0$$

Théorème 3.2 *Soit Ω une partie sans trou de $\mathbb{R}^3$ et $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$.*
1) Si $\nabla \wedge \Phi = 0$ alors il existe ψ tel que $\Phi = \nabla\psi$.
2) Si $\nabla \cdot \Phi = 0$ alors il existe Γ tel que $\Phi = \nabla \wedge \Gamma$.
On dit alors que ψ est un potentiel scalaire de Φ et que Γ est un potentiel vecteur de Φ.

fin de la semaine 5

Cours de la semaine 6

Chapitre 4

Intégration

4.1 Intégrales doubles

vidéo 14: Définition de l'intégrale double.

4.1.1 Introduction

Il est assez difficile de construire avec rigueur une théorie de l'intégration à deux variables, dans ce cours on commence par donner une idée très approximative de la définition, le but étant d'avoir une représentation géométrique de ces objets. Ensuite la partie principale du cours porte sur le deux théorèmes qui permettent le calcul des intégrales doubles : le théorème de Fubini qui permet de se ramener à des intégrales simples et le théorème de changement de variables.

Soit φ une fonction de deux variables définie sur un rectangle $R = [a; b] \times [c; d]$, on suppose que φ est bornée, on peut subdiviser les deux intervalles $[a; b]$ et $[c; d]$ on obtient alors une subdivision σ de R en petits rectangles $r_{i,j}$, on note $\mathcal{S}$ les subdivisions de $\mathbb{R}$, on peut regarder les deux quantités :

$$I^+(\sigma) = \sum \sup\{\varphi(t), t \in r_{i,j}\}\text{aire}(r_{i,j}) \text{ et } I^-(\sigma) = \sum \inf\{\varphi(t), t \in r_{i,j}\}\text{aire}(r_{i,j})$$

Si $\sup\{I^-(\sigma); \sigma \in \mathcal{S}\} = \inf\{I^+(\sigma); \sigma \in \mathcal{S}\}$ alors on dit que φ est intégrable sur R et on note cette valeur :

$$\iint_R \varphi(x; y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Proposition 4.1 *Si f est continue sur R, alors elle est intégrable sur R.*

On peut intégrer sur des domaines qui ne sont pas des rectangles, à la condition que la frontière du domaine puisse être recouvert par une famille de rectangles dont la somme des aires est aussi petite que l'on veut. Pour I^+ on choisit une famille de rectangles dont la réunion contient D.Pour I^- on choisit une famille de rectangles dont la réunion est contenue dans D.

On appelle ces parties les parties quarrables de $\mathbb{R}^2$. De même que pour les fonctions d'une variable si f est intégrable sur Q, alors les sommes de Riemann associées à f tendent vers $\iint_R \varphi(x;y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Proposition 4.2 *Si f est bornée, continue et Q est quarrable alors f est intégrable sur Q.*

Si $f = 1$ alors I^+ et I^- correspondent à l'aire d'une surface constituée de petits rectangles soit contenu soit contenant D. I correspond alors à l'aire de D.

Proposition 4.3 (admis) *Les propriétés suivantes sont assez intuitives si l'on raisonne en terme de volumes : D, D_1, D_2 des parties quarrables du plan, f et g des fonctions intégrales sur chacune des parties, λ un réel.*

1. $\displaystyle\iint_{D_1\cup D_2} \varphi(x;y)dxdy = \iint_{D_1} \varphi(x;y)dxdy + \iint_{D_2} \varphi(x;y)dxdy - \iint_{D_1\cap D_2} \varphi(x;y)dxdy$
2. $\displaystyle\iint_D \varphi(x;y) + \psi(x;y)dxdy = \iint_D \varphi(x;y)dxdy + \iint_D \psi(x;y)dxdy$
3. $\displaystyle\iint_D \lambda\varphi(x;y)dxdy = \lambda \iint_D \varphi(x;y)dxdy$
4. *Si $\varphi \leq \psi$ alors* $\displaystyle\iint_D \varphi(x;y)dxdy \leq \iint_D \psi(x;y)dxdy$
5. $\displaystyle\left|\iint_D \varphi(x;y)dxdy\right| \leq \iint_D |\varphi(x;y)|\, dxdy$

4.1.2 Théorème de Fubini

vidéo 15: Théorème

Théorème 4.1 *Soient φ, h^- et h^+ trois fonctions continues, $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, h^-(x) \leq y \leq h^+(x)\}$. On peut écrire l'intégrale double de φ sur D à l'aide de deux intégrales simples :*

$$\iint_D \varphi(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi(x;y)dy\right) dx$$

Remarque 4.1 On a bien sur le même résultat si l'on échange les rôles de x et y : Si $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; a \leq y \leq b, g^-(y) \leq x \leq g^+(y)\}$ alors

$$\iint_D \varphi(x;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g^-(y)}^{g^+(y)} \varphi(x;y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

4.1.3 Théorème de changement de variables

Théorème 4.2 *Soit Φ une bijection de U dans V deux parties bornées de $\mathbb{R}^2$. Et φ une fonction définie de V dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$\iint_V \varphi(u,v)dudv = \iint_U \varphi(\Phi(x,y)) \left|\det\Big(J\Phi(x,y)\Big)\right| dxdy$$

Preuve : Interprétation du résultat
Si on découpe U en petits rectangles (R_i), dans chaque R_i un point N_i et $M_i = \Phi(N_i)$ on a :

$$\begin{aligned}
\iint_V \varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \sum \iint_{\Phi(R_i)} \varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&\cong \sum \varphi(M_i)\text{aire}\big(\Phi(R_i)\big) \\
&\cong \sum \varphi\big(\Phi(N_i)\big)\text{aire}\big(\Phi(R_i)\big) \\
&\cong \sum \varphi\big(\Phi(N_i)\big)\text{aire}(R_i)|\det(J\Phi(R_i))| \\
&\cong \iint_U \varphi(\Phi(x,y))|\det(J\Phi(x,y))|\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Exemple 4.1 Cas du changement de variable en polaire, on peut faire le calcul à la main et à l'aide du changement de variable.

fin de la semaine 6

Cours de la semaine 7

4.2 Circulation d'un champ de vecteur

vidéo 16: Circulation d'un champ de vecteurs.

4.2.1 Définition

Soit $\overrightarrow{\Phi}$ un champ de vecteur, et γ^+ une courbe bornée, orientée.

Pour une subdivision : $\sigma = (M_i)$ de γ^+, c'est à dire une suite de points sur la courbe posons $I(\sigma) = \sum_i \overrightarrow{\Phi}(M_i) \cdot \overrightarrow{M_iM_{i+1}}$. Si $I(\sigma)$ a une limite lorsque la distance entre deux points consécutifs tend vers 0, on appelle circulation de Φ le long de γ^+ cette limite et on la note :

$$\int_{\gamma^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Proposition 4.4 *C'est le cas en particulier si γ^+ est paramétrée par $F : [a;b] \to \gamma^+$, dans ce cas on a :*

$$\int_{\gamma^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_a^b \overrightarrow{\Phi}(F(t)) \cdot F'(t)\,dt$$

Preuve : en effet chaque point M_i est l'image d'un t_i, deux t_i consécutifs étant très proche.

$$\begin{aligned}
I(\sigma) &= \sum_i \overrightarrow{\Phi}(M_i) \cdot \overrightarrow{M_iM_{i+1}} \\
&= \sum_i \overrightarrow{\Phi}(M_i) \cdot \big(F(t_{i+1}) - F(t_i)\big) \\
&\cong \sum_i \overrightarrow{\Phi}(F(t_i)) \cdot \big(F'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\big) \\
&\cong \sum_i \big(\overrightarrow{\Phi}(F(t_i)) \cdot F'(t_i)\big)(t_{i+1} - t_i) \\
&\cong \int_a^b \overrightarrow{\Phi}(F(t)) \cdot F'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Le résultat bien sur ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Remarque 4.2 On utilise très couramment la notation suivante lorsque $\overrightarrow{\Phi} = (\Phi_1; \Phi_2)$

$$\int_{\gamma^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\gamma^+} \Phi_1\,\mathrm{d}x + \Phi_2\,\mathrm{d}y$$

qui en pratique donne les résultats suivants, si $F(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, alors $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t$

$$\int_{\gamma^+} \Phi_1\,\mathrm{d}x + \Phi_2\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Phi_1\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \Phi_2\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\ \mathrm{d}t$$

On retrouve bien l'intégrale du produit scalaire de $\Phi(F(t))$ avec $F'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$.

Remarque 4.3 Si l'on scinde le chemin γ^+ en deux petits chemins, γ_1^+ et γ_2^+, on obtient que

$$\int_{\gamma^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\gamma_1^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{\gamma_2^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl}$$

De plus si l'on note γ^-, le même chemin parcouru dans le sens inverse alors :

$$\int_{\gamma^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{\gamma^-} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Proposition 4.5 *Soit $\overrightarrow{\Phi}$ un champ conservatif (c'est à dire $\nabla \wedge \Phi = 0$), défini sur un domaine sans trou, alors $\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl}$ ne dépend pas du chemin suivi. Mais uniquement des points A et B.*

Preuve : D'après le théorème de Poincarré il existe φ tel que $\overrightarrow{\Phi} = \nabla\varphi$, on a alors

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_a^b \Phi_1(F(t))F_1'(t) + \Phi_2(F(t))F_2'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial x}(F(t))F_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(F(t))F_2'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\big(\varphi(F(t))\big)\,\mathrm{d}t = \varphi(F(b)) - \varphi(F($$

4.2.2 Green Riemann

vidéo 17: Formule de Green Riemann.

Soit D un domaine borné et ∂D^+ son bord orienté positivement et Φ un champ de vecteur de coordonnées (P, Q)

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D^+} \overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Preuve : On se limite au cas ou D peut se mettre sous la forme suivante :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ et } h^-(x) \leq y \leq h^+(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d \text{ et } g^-(y) \leq x \leq g^+(y)\}$$

On peut alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4.1}$$

$$= \int_c^d \left(\int_{g^-(y)}^{g^+(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \int_a^b \left(\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

$$= \int_c^d Q\big(g^+(y), y\big) - Q\big(g^-(y), y\big)\,\mathrm{d}y - \int_a^b P\big(x, h^+(x)\big) - P\big(x, h^-(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{\partial D^+} Q\,\mathrm{d}y + \int_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

En effet le $\overset{(*)}{=}$ vient du fait que l'on peut paramétrer ∂D^+ pour le premier terme d'abord par $y \mapsto \big(g^+(y); y\big)$ pour y variant de c à d puis par $y \mapsto \big(g^-(y); y\big)$ pour y variant de d à c. Pour le second terme on a de même d'abord $x \mapsto \big(x, h^-(x)\big)$ pour x variant de a à b puis par $x \mapsto \big(x, h^+(x)\big)$ pour x variant de b à a.

Exemple 4.2 $\int_{\partial D(0;R)^+} y^3\,\mathrm{d}x - x^3 dy = -\frac{3}{2}\pi R^4$.

fin de la semaine 7

Cours de la semaine 8

Chapitre 5

Équations différentielles

5.1 Équations différentielles linéaires

vidéo 18: Équations différentielle

5.1.1 Généralités

Dans ce cours la solution d'une équation différentielle (E) est une fonction autant de fois dérivable que nécessaire, définie sur **un intervalle** de $\mathbb{R}$, et qui vérifie (E).

Exemple 5.1 La fonction exponentielle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Exemple 5.2 La fonction définie par $\frac{1}{x}$ est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2y^3 = 0$$

Définition 5.1 *On appelle équation différentielle linéaire une équation différentielle de la forme*

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n(x) y^{(n)}(x) = b(x)$$

où les a_n et b sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les $y^{(n)}$ sont les dérivées énièmes de la fonction inconnue y.

Remarque 5.1 L'application qui à y associe $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}$ est linéaire, d'où la dénomination.

Définition 5.2 *On appelle solution générale de (E) une formule dépendant d'un certain nombre de constantes, et qui donne toutes les solutions de (E), lorsque ces constantes changent de valeurs.*

Définition 5.3 *L'entier N $(a_N \neq 0)$ qui correspond au plus grand ordre de dérivation s'appelle l'ordre de l'équation différentielle (E).*

Exemple 5.3
- $y'' + xy' + y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2.
- $(y')^2 + y = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 1.
- $y^{(4)} + x^3 y' + \ln(x) y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 4
- $(y'') + \ln(y) = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 2.
- $2yy' = 1$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 1.

Définition 5.4 *L'équation linéaire (E) est dite à coefficients constants si les a_n ne sont pas des fonctions mais des réels*

Remarque 5.2 Une équation différentielle linéaire a des solutions réelles et des solutions complexes. Dans ce cours nous nous intéressons aux solutions réelles, mais il est parfois plus facile de trouver les solutions complexes. On peut alors trouver les solutions réelles en prenant les parties réelles des solutions complexes. En effet une fonction f à valeurs complexes est solution de (E) ssi $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(f)$ sont solutions.

Définition 5.5 *On appelle équation différentielle linéaire sans second membre (EDLSSM) associée à (E) l'équation différentielle (E')*

$$(E') : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = 0$$

5.1.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

vidéo 19: Équations différentielle

Dans ce paragraphe

$$(E) : y' + ay = b$$

$$(E') : y' + ay = 0$$

Théorème 5.1 *Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme*

$$y(x) = e^{-\int^x a(t)dt}\left(\int^x b(u)e^{\int^u a(t)dt}du + K\right)$$

et les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ke^{-\int^x a(t)dt}$$

où $\int^x h(u)du$ représente une primitive quelconque de la fonction h et K un réel quelconque.

Preuve :

On note $\int^x a(t)dt$ une primitive quelconque de a prise au point x. Puisque la quantité $e^{\int^x a(t)dt}$ ne s'annule pas l'équation différentielle est équivalente à

$$(y'(x) + a(x)y(x))e^{\int^x a(t)dt} = b(x)e^{\int^x a(t)\mathrm{d}t}$$

Or le premier terme n'est autre que

$$\frac{d}{dx}(y(x)e^{\int^x a(t)\mathrm{d}t})$$

En intégrant on obtient alors

$$y(x)e^{\int^x a(t)\mathrm{d}t} = \int^x b(u)e^{\int^u a(t)dt}\mathrm{d}u + K$$

d'où le résultat annoncé.

Remarque 5.3 Les solutions $\mathcal{S}'$ de (E') forment un espace vectoriel de dimension 1, c'est-à dire une droite vectorielle. Elles sont de la forme $(Ke^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t})$ et les solutions de (E) forme un espace affine de direction $\mathcal{S}'$, c'est à dire une droite affine.

Ce qui peut encore s'énoncer :

> La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une constante multipliée par une solution non nulle, de l'équation sans second membre.

Méthode de résolution de l'équation sans second membre (E') (M1) :

On remarque que la fonction nulle est solution, de plus si une solution s'annule en un point d'après le théorème précédent elle est nulle partout (en effet $K = 0$). Soit y une solution de (E') qui n'est pas la fonction nulle et donc qui ne s'annule pas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires y est soit une fonction strictement positive, soit une fonction strictement négative :

$$\frac{y'}{y} = -a$$

d'où en intégrant en x des deux cotés :

$$\ln(|y|) = \int^x -a$$

d'où

$$|y| = e^{\int^x -a\mathrm{d}x + K}$$

$$y = \pm e^{-\int^x a\mathrm{d}x}e^K = Ce^{-\int^x a}$$

En effet $\pm e^K$ est une nouvelle constante de signe quelconque que l'on note C.

Exemple 5.4 Résolvons $2y' + 3xy = 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-3}{2}x$$

$$\ln(|y|) = \frac{-3}{4}x^2 + K$$

$$y = \pm e^{\frac{-3}{4}x^2 + K} = \pm e^K e^{\frac{-3}{4}x^2} = Ce^{\frac{-3}{4}x^2}$$

K et C étant des réels quelconques.

Exemple 5.5 Résolvons $(E): 2y' + 3xy = x$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. On a déjà résolu l'équation sans second membre, on remarque que $y = \frac{1}{3}$ est une solution de (E), les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y = \frac{1}{3} + Ce^{\frac{-3}{4}x^2}$$

la condition initiale nous permet de calculer C

$$y(0) = 0 = \frac{1}{3} + Ce^{\frac{-3}{4}0^2}$$

la solution est donc

$$y = \frac{1}{3}(1 - e^{\frac{-3}{4}x^2})$$

Méthode de variation de la constante (M2) : Cette méthode permet de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
Pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre on peut utiliser la formule du théorème précédent mais l'on peut aussi commencer par résoudre l'équation sans second membre, on trouve alors une famille de solutions de la forme Kf où K est une constante qui appartient à $\mathbb{R}$ et f une solution non nulle de l'équation sans second membre.
On cherche alors une solution de l'équation différentielle avec second membre de la forme $K(x)f(x)$.

Exemple 5.6 Résoudre l'équation $xy' - 2y = x^3 \ln(x)$
On commence par résoudre l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

ce qui donne en intégrant $\ln(|y|) = 2\ln(|x|) + k$ les solutions sont donc les fonctions $y(x) = Kx^2$, où K est un réel quelconque. Pour résoudre l'équation avec second membre faisons 'varier la constante' on note z la fonction $z(x) = x^2$ et l'on cherche une solution de la forme $y(x) = K(x)z(x)$ l'équation différentielle devient

$$x(K'(x)z(x) + z'(x)K(x)) - 2K(x)z(x) = x^3 \ln(x)$$

or $x(z'K) - 2Kz = 0$ car z est une solution de l'équation sans second membre. Donc finalement l'équation se ramène à $xK'(x)z(x) = x^3 \ln(x)$ il suffit alors d'intégrer

$$K'(x) = \ln(x)$$

on obtient après une intégration par parties

$$K(x) = x \ln x - x$$

d'où l'on déduit les solutions

$$y(x) = (x \ln x - x + C)x^2$$

où C est un réel quelconque.

fin de la semaine 8

Cours de la semaine 9

5.1.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

vidéo 20: Équations différentielle

Dans ce paragraphe

$$(E): ay'' + by' + cy = d$$

$$(E'): ay'' + by' + cy = 0$$

a, b, c sont des constantes, a est une constante non nulle et d est une fonction.

Théorème 5.2 *Les solutions de (E') forment un espace vectoriel de dimension 2, on appelle polynôme caractéristique de (E') le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, soient r_1 et r_2 ses racines, trois cas sont possibles :*

1. *r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes les solutions de (E') sont les fonctions de la forme :*
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$
où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.
2. *$r_1 = r_2$, P possède une racine double réelle les solutions de (E') sont les fonctions de la forme :*
$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$
où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.
3. *r_1 et r_2 sont deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ $(r_2 = \alpha - i\beta)$. Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme :*
$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$
où C_1 et C_2 sont des réels.

Remarque 5.4 On peut s'intéresser aux solutions complexes de cette équation différentielle, on obtient alors dès qu'il y a deux racines distinctes r_1 et r_2.
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$
où C_1 et C_2 sont des complexes.

Preuve : D'abord il est clair que si r_1 est une racine (réelle ou complexe) du polynôme caractéristique la fonction définie par $y_1(x) = e^{r_1 x}$ est solution de (E'). Soit alors h une fonction, posons $z(x) = h(x)e^{-r_1 x}$, la fonction $h = zy_1$ est solution ssi
$$a(z''y_1 + 2y_1'z' + zy_1'') + b(z'y_1 + zy_1') + czy_1 = 0$$
donc h est solution ssi
$$az''y_1 + z'(2ay_1' + by_1) + z(ay_1'' + by_1' + cy_1) = 0$$
or y_1 est une solution de l'équation différentielle donc le coefficient en z est nulle : on s'est ramené à une équation du premier ordre en z' :
$$az''y_1 + (2ay_1' + by_1)z' = 0$$
que l'on résout en utilisant le fait que $y_1' = r_1 y_1$ (car $y_1(x) = e^{r_1 x}$) et $-\frac{b}{a} = r_1 + r_2$
$$\frac{z''}{z'} = -\frac{(2ar_1 + b)}{a} = r_2 - r_1$$
donc h est solution ssi
$$z' = Ke^{(r_2 - r_1)x}$$
avec K une constante. Si le polynôme caractéristique a une racine double $r_2 - r_1 = 0$, $z = C_1 x + C_2$ et $h = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$. Sinon les racines sont distinctes et $r_2 - r_1 \neq 0$ donc $z = C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2$ donc $h = (C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2)e^{r_1 x}$ d'où le résultat. Si les racines sont complexes il suffit de prendre la partie réelle des solutions complexes.

Remarque 5.5 Pour résoudre l'équation avec second membre on peut utiliser la méthode de variation des constantes (hors programme) ou utiliser la méthode du second membre exponentielle polynôme (méthode M3). De façon générale si y_2 est une solution d'une équation différentielle linéaire (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation linéaire sans second membre associée ssi y_2 est aussi solution de (E). Lorsque l'on connait une solution de (E) on les connait donc toutes, il suffit pour passer de l'une à l'autre d'ajouter une solution de (E').

Méthode du second membre exponentielle-polynôme (M3) : (admis).
Soit l'équation
$$(E) : ay'' + by' + cy = e^{\delta x}T(x)$$
où α est un réel et T un polynôme. Il existe toujours une solution de (E) de la forme

1. $e^{\delta x}Q(x)$ si δ n'est pas une racine du polynôme caractéristique P de (E) :
2. $xe^{\delta x}Q(x)$ si δ est une racine simple du polynôme caractéristique P.
3. $x^2 e^{\delta x}Q(x)$ si δ est une racine double du polynôme caractéristique P.

Dans les trois cas Q est un polynôme de même degré que T.

vidéo 21: Second membre exp

Exemple 5.7 Résoudre $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$.
Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ le second membre est de la forme du théorème avec $\delta = 3$ et $T = 1$, δ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $Q(x)e^{3x}$ avec $deg(Q) = 0$ on trouve alors $9Q - 12Q + 4Q = 1$.
La solution générale est donc

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x} + e^{3x}$$

Exemple 5.8 trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - y' - 2y = x^2e^{-x}$$

Avec les notations du théorème précédent $\delta = -1$ qui est une racine de multiplicité $m = 1$ du polynôme caractéristique. On va donc chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = x(ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

On dérive deux fois y et on cherche des conditions sur a, b et c pour que y soit solution de l'équation de départ.

Remarque 5.6 Le résultat reste vrai pour les solutions complexes dans le cas où δ est complexe. Ce qui permet de chercher des solutions particulières lorsque le second membre est un polynôme multiplié par un cosinus ou un sinus.

Exemple 5.9 Chercher un solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = x\sin(x)$.
On remarque que $x\sin(x) = \mathcal{I}\mathrm{m}\,(xe^{ix})$, or i n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut donc chercher une solution complexe de la forme $y(x) = (ax + b)e^{ix}$ ce qui nous pousse à chercher des solutions réelles de la forme

$$y(x) = (ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)$$

fin de la semaine 9

Cours de la semaine 10

5.1.4 Équation différentielle linéaire à coefficients constants de tout ordre

vidéo 22: Équation différentielle linéaire à coefficient

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b \qquad\qquad (E') : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = 0$$

où les a_n sont des réels, b une fonction et les $y^{(n)}$ sont les dérivées énièmes de la fonction inconnue y

Définition 5.6 *On appelle polynôme caractéristique de (E) ou de (E') le polynôme*

$$P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$$

Exemple 5.10 le polynôme caractéristique de l'équation $y''' - 2y'' + 3y = x$ est le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3$.

Théorème 5.3 *(admis) Si le polynôme caractéristique de (E') se factorise sous la forme*

$$\prod_{k=1}^{t} (X - r_k)^{m_k} \prod_{K=1}^{T} \big(X - (\alpha_K + i\beta_K)\big)^{M_K} \big(X - (\alpha_K - i\beta_K)\big)^{M_K}$$

les r_k sont les racines réelles de P, $(\alpha_k \pm i\beta_k)$ sont les racines complexes conjuguées de P, et les m_k, M_k les multiplicités de ces racines. Alors les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{t} Q_k(x)e^{r_k x} + \sum_{K=1}^{T} e^{\alpha_K x}\big(R_K(x)\cos(\beta_K x) + S_K(x)\sin(\beta_K x)\big)$$

les Q_k, R_K, S_K étant des polynômes arbitraires de degré strictement inférieur à m_k ou à M_K.

Remarque 5.7 Ce théorème est une généralisation du théorème 5.2.

Exemple 5.11 Résoudre l'équation différentielle $y''' - 3y' + 2y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$. Ce qui dans le théorème correspond à $t = 2; r_1 = 1; m_1 = 2; r_2 = -2; m_2 = 1$ et il n'y a pas de racines complexes non réelles.Les solutions sont donc les fonctions :

$$f(x) = (ax+b)e^x + ce^{-2x}$$

avec $a; b$ et c des réels arbitraires. $ax + b$ est bien un polynôme quelconque de degré 1.

Exemple 5.12 Résoudre l'équation différentielle $y^{(6)} - y = 0$
Le polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{2i\frac{\pi}{3}})(X - e^{4i\frac{\pi}{3}})(X - e^{5i\frac{\pi}{3}})$$

Ce qui dans le théorème correspond à $t = 2; r_1 = 1; m_1 = 1; r_2 = -1; m_2 = 1; T = 2; \alpha_1 + i\beta_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}; \alpha_2 + i\beta_2 = e^{3i\frac{\pi}{3}}; M_1 = 1; M_2 =$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(C_3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_4\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)) + e^{-\frac{x}{2}}(C_5\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_6\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

avec les C_i des réels arbitraires.

Méthode du second membre exponentielle-polynôme (M4) : (admis).
Soit l'équation

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = e^{\delta x}T(x)$$

où δ est un réel et T un polynôme. Il existe toujours une solution de (E) de la forme

1. $e^{\delta x}Q(x)$ si δ n'est pas une racine du polynôme caractéristique P de (E) :
2. $x^m e^{\delta x}Q(x)$ si δ est une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique P.

Dans les deux cas Q est un polynôme de même degré que T.

5.1.5 Équation différentielle linéaire de tout ordre

vidéo 23: Équation différentielle linéaire de tout ordre, généralité

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b \qquad\qquad (E') : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = 0$$

où les a_n et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I, la fonction a_N ne s'annulant pas sur I et les $y^{(n)}$ sont les dérivées énièmes de la fonction inconnue y

Proposition 5.1 *Soient y_1 et y_2 des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre (E') alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont solutions de (E') pour tout réel α. Soit y_2 est une solution d'une équation différentielle linéaire (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation linéaire sans second membre associée ssi y_2 est aussi solution de (E).*

Preuve :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(y_1+y_2)^{(n)} = \sum_{n=0}^{N} a_n y_1^{(n)} + \sum_{n=0}^{N} a_n y_2^{(n)} = 0+0=0$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(\alpha y_1)^{(n)} = \sum_{n=0}^{N} \alpha a_n y_1^{(n)} = \alpha 0 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(y_1-y_2)^{(n)} = \sum_{n=0}^{N} a_n y_1^{(n)} - \sum_{n=0}^{N} a_n y_2^{(n)} = b-b=0$$

La proposition précédente peut s'écrire :

La solution générale d'une équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Remarque 5.8 Si E est un espace vectoriel, un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E est un ensemble de la forme $\{a+f|f \in E\}$ où a est un élément quelconque de $\mathcal{S}$.
Les solutions S' de (E') forment un espace vectoriel et les solution S de (E) forment un espace affine de direction (E').

Proposition 5.2 (lemme de superposition) *Pour déterminer une solution particulière de $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b_1 + b_2$, il suffit d'ajouter une solution particulière de $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b_1$ à une solution particulière de $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b_2$*

Preuve : Aucune difficulté

Théorème 5.4 (dit de Cauchy linéaire) *Pour tout $(N+1)$-uplet de réels $(x_0, y_0, y_1, y_2, y_{N-1}) \in I \times \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution y de l'équation (E) définie sur I tout entier et qui vérifie*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1} \end{cases}$$

fin de la semaine 10

Cours de la semaine 11

5.1.6 Exemple d'équations différentielles non linéaires

vidéo 24: Équations différentielle

Cas des variables séparables

Définition 5.7 *Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme*

$$(E) : g(y)y' = f(x)$$

où g et f sont des fonctions.

Exemple 5.13 $y' \ln(1+y^2) = 2x$ est à variables séparables.

Exemple 5.14 $(1+x^2)y' = 1+y^2$ est à variables séparables car elle est équivalente à l'équation :

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Exemple 5.15 $(1+x^2)y' = y$ est linéaire et elle est à variable séparable (il faut quand même faire attention lorsque l'on va diviser par y, car y est une fonction qui pourrait s'annuler en certains points).

Proposition 5.3 *Soient G une primitive de g, F une primitive de f et y une fonction dérivable , y est solution de (E) ssi $G(y(x)) = F(x) + K$ où K est une constante arbitraire.*

Preuve : $\Leftarrow G'(f(x))f'(x) = f(x)$ donc f est bien solution de (E)
$\Rightarrow g(y(x))y'(x) = f(x)$
donc $\int(g(y(x))y'(x)dx = \int(f(x))dx$
donc $G(y(x)) = F(x) + K$

Remarque 5.9 Dans la pratique on pose les calculs comme ceci : on écrit $g(y)y' = f(x)$ de la façon suivante

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$g(y)dy = f(x)dx$$

ce qui, en intégrant des deux cotés donne

$$G(y) = F(x) + K$$

Exemple 5.16 Résoudre $y^2y' = x^2$
La méthode pratique vue précédemment nous permet d'écrire $y^2dy = x^2dx$ ce qui en intégrant nous donne $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + K$ on obtient donc la solution générale : $y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$

Exemple 5.17 Résoudre $y'\ln(y) = e^x$
On se ramène à $\ln(y)dy = e^x dx$
ce qui en intégrant donne $y\ln(y) - y = e^x + K$
on remarque que l'on ne trouve pas une expression pour y mais une relation (fonctionnelle) entre x et y.

Équation de la forme $y'' = f(y)$

Pour les équations de la forme $y'' = f(y)$, on peut commencer par multiplier chaque terme par y' pour obtenir :

$$y'y'' = y'f(y)$$

Si F est une primitive de la fonction f, on obtient en intégrant :

$$\frac{1}{2}y'^2 = F(y) + K$$

où K est une constante.
Ce qui nous donne : $y' = \pm\sqrt{2F(y) + 2K}$, c'est une équation à variables séparables.

Remarque 5.10 Ce type d'équation $y'' = f(y)$ est important en mécanique, car on tombe dessus lorsqu'on applique le théorème fondamentale de la dynamique.

Cas des équations différentielles homogènes

Définition 5.8 *Une équation différentielle du premier ordre est homogène si elle peut se mettre sous la forme*

$$(E) : y' = f(\frac{y}{x})$$

où f est une fonction scalaire.

Exemple 5.18 $\big(\ln(y^2) - \ln(x^2)\big)y' = 7$ est homogène.

Dans ce cas on peut effectuer un changement de fonction inconnue en posant $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Cela permet de se ramener à une équation différentielle à variables séparables. En effet

$$y(x) = u(x)x$$

donc $y' = u'x + u$ d'où (E) devient $u'x + u = f(u)$ qui est à variables séparables.

fin de la semaine 11

Cours de la semaine 12

5.2 Introduction aux équations aux dérivées partielles

vidéo 25: Introduction aux équations aux dérivée

Rappels et mise en garde

1. Dans ce paragraphe φ est l'inconnue de nos EDP. C'est un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit φ une fonction de deux variables, définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ représente la dérivée de la fonction $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ au point x_0. Dans la pratique cela revient à calculer la dérivée de φ par rapport à x en considérant y comme une constante.

   Exemple 5.19 Si $\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ alors
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$
3. Si $\phi(x,y)$, $\psi(x,y)$ et $\xi(x,y)$ sont des fonctions de deux variables alors
$$\frac{\partial}{\partial x}\phi\big(\psi(x,y),\xi(x,y)\big) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\psi(x,y),\xi(x,y))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(\psi(x,y),\xi(x,y))\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y)$$

Remarque 5.11 Résoudre l'équation aux dérivées partielles (ou EDP)
$$(E) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$
revient à déterminer toutes les fonctions dont la dérivée par rapport à x est nulle. On voit que toutes les fonctions qui ne dépendent que de y sont solutions. On la résout ainsi : pour un y_0 fixé la fonction $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ a une dérivée nulle, elle est donc constante, finalement φ ne dépend que de y_0 et donc φ est de la forme : $\varphi(x,y) = K(y)$. Réciproquement les fonctions de la forme $\varphi(x,y) = K(y)$ vérifient bien (E).

Remarque 5.12 La fonction d'une variable définie par $f(x) = 1$ si $x \in [-2;-1]$ et 2 si $x \in [1;2]$ est une fonction dérivable de dérivée nulle, et elle n'est pas constante. Ceci peut arriver lorsque l'on résout des équations aux dérivées partielles aussi simple que (E). Ceci n'est plus possible si l'on travaille sur une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Dans la suite du cours nous ne nous préoccuperons plus de ce genre de problèmes qui peuvent exister.

5.2.1 EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

vidéo 26: Changement de variable

Définition 5.9 *Ce sont les équations aux dérivées partielles de la forme*
$$(E) : \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi(x,y,\varphi)$$
où α et β sont des réels.

Cas très particulier :
$$(E) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$
Les solutions sont les fonctions $\varphi(x,y) = k(y)$ où k est une fonction quelconque d'une variable. Si l'on veut se limiter aux solutions de classe $\mathcal{C}^1$, il faut prendre k quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Cas particulier :
$$(E) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \psi(x,y)$$
en intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme
$$\varphi(x,y) = \int^x \psi(x,y)\mathrm{d}x + k(y)$$
où k est une fonction quelconque.

Exemple 5.20 Résoudre $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = e^{3xy}$. en intégrant par rapport à x on trouve

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{3y}e^{3xy} + k(y)$$

Exemple 5.21 Résoudre $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(x,y)e^{3xy}$. ce que l'on peut écrire

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi} = e^{3xy}$$

on fixe y et l'on intègre en x, on obtient donc

$$\ln \mid \varphi(x,y) \mid = \frac{1}{3y}e^{3xy} + k(y)$$

d'où

$$\varphi(x,y) = h(y)e^{\frac{1}{3y}e^{3xy}}$$

Cas général : On se ramène par un changement de variable linéaire au cas $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \psi(x,y,\varphi)$. Pour cela il suffit de poser $\left\{\begin{array}{l} u = x + ay \\ v = y \end{array}\right.$ et $\varphi(x,y) = \xi(u,v) = \xi(x+by,y)$ on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial u}a + \frac{\partial\xi}{\partial v} \end{array}\right.$$

(E) est donc équivalente à l'équation :

$$\alpha\frac{\partial\xi}{\partial u} + \beta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}a + \frac{\partial\xi}{\partial v}\right) = \psi(u-av,v,\xi)$$

qui s'écrit encore

$$(\alpha + a\beta)\frac{\partial\xi}{\partial u} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial v} = \psi(u-av,v,\xi)$$

Il suffit alors de choisir a tel que le coefficient de $\frac{\partial\xi}{\partial u}$ soit nul.

Exemple 5.22 Résoudre l'équation :

$$(E) : 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 3\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3\varphi$$

On commence par poser $\left\{\begin{array}{l} u = x + ay \\ v = y \end{array}\right.$ et $\varphi(x,y) = \xi(u,v) = \xi(x+ay,y)$ l'équation (E) est équivalente à

$$(2+3a)\frac{\partial\xi}{\partial u} + 3\frac{\partial\xi}{\partial v} = 3\xi$$

posons $a = -\frac{2}{3}$ on a alors :

$$3\frac{\partial\xi}{\partial v} = 3\xi$$

donc

$$\xi(u,v) = k(u)e^{v}$$

où K est une fonction quelconque, finalement en remplaçant u et v on obtient :

$$\varphi(x,y) = k(3x-2y)e^{y}$$

par exemple les fonctions $e^{3(-x+y)}$ et $(3x-2y)e^{3x-2y}e^{3(-x+y)} = (3x-2y)e^{y}$ sont solutions de l'équation (E) respectivement pour $k(u) = 1$ et $k(u) = ue^{u}$.

5.2.2 EDP linéaire d'ordre 1, changement de variable

Remarque 5.13 Il existe une méthode générale, qui dépasse le niveau de ce cours pour trouver de bons changements de variables lorsque les coefficients ne sont pas constants

$$(E) : \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi(x, y, \varphi)$$

où α et β sont des fonctions de x, y et φ.

Exemple 5.23 Résoudre, en effectuant un changement de variables polaires l'EDP

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y\varphi$$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$ et $\xi(r, \theta) = \varphi(x, y)$, on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit facilement par la méthode de Cramer par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

ce qui en remplaçant dans l'équation de départ donne :

$$\cos(\theta)\left(r\cos(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) + \sin(\theta)\left(r\sin(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) = r\sin(\theta)\xi$$

ce qui donne

$$r\frac{\partial \xi}{\partial r} = r\sin(\theta)\xi$$

soit encore

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial r}}{\xi} = \sin\theta$$

qui s'intègre en

$$\ln|\xi(r, \theta)| = r\sin\theta + k(\theta)$$

finalement puisque $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, les solutions sont les fonctions

$$\varphi(x, y) = k(\frac{y}{x})e^y$$

où k est une fonction dérivable quelconque. On vérifie facilement que ces fonctions sont bien des solutions de l'EDP.

fin de la semaine 12